Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d’un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction paire et périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, solution d'une équation différentielle avec des conditions initiales données. L'étude porte ensuite sur ses variations, le temps nécessaire pour atteindre un seuil de fermeture, un algorithme et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, donc l'équation possède deux racines réelles distinctes. La formule quadratique donne $r_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2}$ et $r_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -4$ et $r_2 = -1$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

> Les racines caractéristiques -4 et -1 sont réelles et distinctes. D'après le tableau fourni, la solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont réelles et arbitraires.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse à l'instant t = 0, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

- À l'instant initial, la distance entre O et M est de 20 cm : $f(0) = 20$.
- La vitesse de rapprochement est donnée comme négative et égale à $-10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Comme cette vitesse est la dérivée de la distance, $f'(0) = -10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression donnée. Le second terme contient alors l'exposant $-4 \times 2 = -8$:

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

La fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, car $f'(t) = \frac{e^{-4t}}{3}(40 - 70e^{3t}) < 0$. À $t = 4$, on obtient $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette valeur étant inférieure à $0,5$ cm, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. La fonction étant une combinaison de ces deux exponentielles, sa limite est la combinaison correspondante de leurs limites.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.**

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est 0. Par définition, lorsque la fonction tend vers une valeur finie, la courbe admet une asymptote horizontale dont l'équation est égale à cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale a pour équation $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le coefficient de e^{-t} est donc multiplié par -1, et celui de e^{-4t} par -4 :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

La valeur initiale est $f(0) = 20$, la dérivée est négative sur l'intervalle et la limite en $+\infty$ vaut 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en indiquant f(t) arrondie au centième ainsi que la valeur de vérité de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque passage, l'algorithme augmente t de $0,1$, puis teste si $f(t) > 0,5$. Il s'arrête lorsque cette condition devient fausse. Les valeurs ci-dessous sont arrondies au centième.

Ligne	t	$f(t)$	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3,8$, la distance vaut environ $0,52$ cm et reste supérieure au seuil. À $t = 3,9$, elle vaut environ $0,47$ cm : la condition $f(t) > 0,5$ devient fausse et la boucle s'arrête. La valeur finale correspond donc au premier dixième de seconde où le seuil est franchi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé après environ 3,9 secondes.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. En appliquant la relation de moyenne sur $[0;4]$, puis en évaluant aux bornes :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right] = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

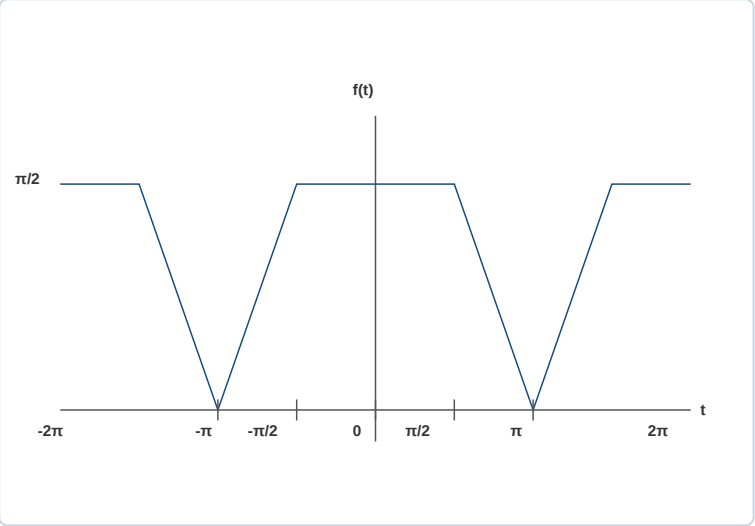
2. Série de Fourier d'une fonction paire et périodique

Une fonction paire et périodique de période 2π est définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier, sa somme partielle d'ordre 3, l'identification de sa courbe et l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

Sur \,$[-\pi;\pi]$, le graphe monte de 0 à $\pi/2$ entre $-\pi$ et $-\pi/2$, reste constant jusqu'à $\pi/2$, puis descend à 0 en π. On répète ce motif par périodicité de période 2π sur l'intervalle demandé.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Graphe pair, de période 2π, avec des paliers à $\pi/2$ et des minima nuls en $(2k+1)\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour $n \geq 1$, f est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire : leur produit est impair et son intégrale sur $[-\pi;\pi]$ est nulle. Ce produit est aussi 2π-périodique, donc son intégrale sur $[0;2\pi]$ est nulle également. La formule du formulaire donne alors $b_n = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f, sachant que sa période est T = 2π.

La pulsation vaut $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Avec la période donnée, $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a_0 est égal à $3\pi/8$.

Par le formulaire, $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. La fonction étant paire, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. Avec sa définition par morceaux :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Comme $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, on a $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare à $\pi/2$, où la définition de f change, puis on remplace $f(t)$ par son expression sur chaque intervalle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

Question 6. À partir de la formule fournie pour a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule donnée : $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les valeurs des cosinus donnent successivement les trois coefficients demandés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \dfrac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\dfrac{1}{\pi}, \quad a_3 = \dfrac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients obtenus l'expression de la somme partielle de Fourier $s_3(t)$ demandée dans le sujet.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par leurs valeurs, on obtient l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{2}{\pi}\cos(t) - \dfrac{1}{\pi}\cos(2t) + \dfrac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

Parmi les trois courbes proposées, la somme partielle s_3 correspond à la courbe numéro 3.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.**

En utilisant les coefficients exacts :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

On arrondit au dix-millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative est $\dfrac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6$, elle vaut environ $0{,}074\%$. Le choix correspondant est donc $0{,}1\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, d'une durée de deux heures. Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie la fermeture d'un tiroir et les séries de Fourier, évaluant équations différentielles, fonctions, algorithmes, intégrales, tracés et approximation d'une valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation $y'' + ay' + by = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + ar + b = 0$.
- La dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de variation de la distance $f(t)$; les conditions initiales déterminent les constantes de la solution.
- Pour une fonction périodique de période T, la pulsation fondamentale vaut $\omega = 2\pi/T$.
- Une fonction paire a des coefficients de Fourier b_n nuls et, avec la convention du sujet, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse initiale et distinguer la distance OM de sa dérivée.
- Dans l'algorithme, suivre l'ordre des opérations et vérifier la condition après chaque incrément de t.
- Pour les séries de Fourier, tenir compte de la parité, de la période et des conventions du formulaire.
- Pour l'erreur relative, comparer P à F^2, car P approche F^2 et non directement F.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ?

On résout d'abord l'équation caractéristique associée. La forme de la solution générale dépend des racines obtenues : deux racines réelles distinctes, une racine double ou deux racines complexes conjuguées.

Q : Comment exploiter la parité dans le calcul des coefficients de Fourier ?

Pour une fonction paire, l'intégrande $f(t)\sin(n\omega t)$ est impair, donc son intégrale sur une période symétrique est nulle et $b_n = 0$. Les coefficients cosinus se calculent ensuite avec la formule adaptée aux fonctions paires.

Q : Comment gérer les questions successives liées à l'algorithme pendant l'épreuve ?

Initialisez les variables comme indiqué, incrémentez t dans l'ordre prévu et évaluez la condition à chaque étape. Reportez les valeurs demandées dans le tableau, puis interprétez la valeur finale dans le contexte du tiroir.

Q : Quels critères de présentation sont importants pour les tracés et les calculs de Fourier ?

Un tracé doit respecter la définition par morceaux, la parité et la période, avec des repères lisibles. Pour les coefficients, indiquez les formules employées et respectez la précision demandée, notamment pour l'approximation à 10^{-4}.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Architectures en Métal : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.