Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d’une machine à embouteiller (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données annuelles de 2013 à 2021 décrivent le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel par changement de variable, puis une fonction issue d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs du changement de variable y = ln(N − 30), arrondies au millième.

Pour chaque année, on utilise la valeur correspondante de N_i, exprimée en milliers, puis on calcule $y_i = \ln(N_i - 30)$. Par exemple, pour 2013 : $\ln(56,25 - 30) \approx 3,268$. Le même calcul est appliqué aux neuf données du tableau, avec un arrondi au millième. Les rangs k_i ne changent pas cette transformation : ils servent ensuite à l'ajustement linéaire.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

Cette ligne complète le tableau de l'annexe.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> y_i : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement des points Mᵢ(kᵢ ; yᵢ), sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

On associe les rangs $k_i = 0, 1, \ldots, 8$ aux valeurs transformées calculées précédemment. La régression linéaire par moindres carrés donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2606$. Chaque coefficient est ensuite arrondi au centième, comme le demande le sujet. Cette droite ajuste les points transformés, et non directement les nombres de personnes équipées.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La droite d'ajustement, avec les coefficients arrondis au centième, est $y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire le modèle N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k) du nombre, en milliers, de personnes équipées de l'implant selon le rang k.

1. On repart de $y = \ln(N - 30)$, donc $N - 30 = e^{y}$.
2. En remplaçant y par l'ajustement obtenu, $N - 30 = e^{0,08k + 3,26} = e^{3,26}e^{0,08k}$.
3. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, on retrouve le modèle annoncé dans le sujet. La quantité N reste exprimée en milliers de personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le modèle déduit est $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, avec $N(k)$ exprimé en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de l'année 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$, puisque le rang zéro correspond à 2013. On utilise le modèle de la partie A : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,70$ milliers. La valeur est déjà proche du millier de personnes demandé après conversion depuis les milliers. Il faut donc exprimer le résultat final en personnes, et non en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Selon le modèle de la partie A, environ 103 700 personnes seront équipées en 2026, au millier près.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide sur le long terme et justifier la réponse.**

Le modèle ne peut pas rester valable indéfiniment si la population demeure stable à 60 millions d'habitants. En effet, lorsque k tend vers $+\infty$, le terme exponentiel $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle prévoit donc une hausse sans borne du nombre de personnes équipées. À terme, cette prévision dépasserait nécessairement le nombre total d'habitants du pays.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le modèle tend vers l'infini et finit par dépasser la population stable de 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y′ + 0,05y = 0.**

L'équation homogène est $y' + 0,05y = 0$, soit $y' = -0,05y$. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, de coefficient constant. Ses solutions sont des exponentielles de taux $-0,05$, multipliées par une constante réelle arbitraire. La restriction à l'intervalle $[0;+\infty[$ ne modifie pas cette forme générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;+\infty[$, toutes les solutions sont $y(x) = Ce^{-0,05x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,05y = 0,05.**

1. On cherche une solution constante sous la forme $y(x) = c$, où c est un réel.

2. Sa dérivée est nulle. L'équation devient donc $0,05c = 0,05$, d'où $c = 1$.

Cette valeur fournit une solution particulière de l'équation complète, qui servira à construire sa solution générale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante de (E) est $y(x) = 1$.

Question 1.c. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante égale à 1. La différence entre deux solutions de (E) vérifie l'équation homogène (E_0). On ajoute donc à cette solution particulière toutes les solutions homogènes trouvées à la question précédente. Cela donne la famille complète des solutions sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions de (E) sont $y(x) = 1 + Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.

1. On applique la condition initiale à la solution générale : $g(0) = 1 + Ce^0$.
2. Comme $g(0) = 8$, on obtient $1 + C = 8$, donc $C = 7$.

En remplaçant la constante dans la solution générale de l'équation différentielle, on obtient l'expression de g sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $g(0) = 8$ est $g(x) = 1 + 7e^{-0,05x}$, pour $x \geq 0$.

Question 2. Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(−0,05t)), où t est le temps en années depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.

Le temps est compté en années depuis 2013 : pour 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. En remplaçant cette valeur dans le modèle de la partie B, on obtient $f(13) = \frac{450}{1+7e^{-0,05\times 13}} \approx 96,684$ milliers. La consigne demande un arrondi au millier de personnes, donc on convertit cette valeur en personnes puis on arrondit.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le modèle de la partie B prévoit environ 97 000 personnes équipées en 2026, au millier près.

Question 3. Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-0{,}05t}$ tend vers zéro. Le dénominateur $1 + 7e^{-0{,}05t}$ tend alors vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 450. La limite de la fonction est donc 450. Puisque $f(t)$ est exprimée en milliers de personnes, cette limite correspond à 450 000 personnes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 450$ milliers : le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

Question 4. À partir de l'expression fournie de f'(t), déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La dérivée fournie est $f'(t) = \frac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive et le dénominateur est strictement positif. Le numérateur l'est également, donc $f'(t) > 0$ sur l'intervalle entier. La fonction est ainsi strictement croissante : selon ce modèle, le nombre d'équipés augmente avec le temps.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$: le nombre de personnes équipées augmente selon le modèle.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

1. On résout $f(t) > 120$, car $f(t)$ est exprimée en milliers.
2. La résolution donne $e^{-0{,}05t} < \frac{11}{28}$, donc $t > \frac{\ln(28/11)}{0{,}05} \approx 18{,}686$.
3. Le nombre d'années écoulées étant entier pour une année civile, le premier rang qui dépasse le seuil est 19. On ajoute ce rang à l'année de départ, 2013.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le seuil de 120 000 personnes est dépassé pour la première fois en 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau contenu dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer la phrase « La file d'entrée ne se vide pas dans la journée » à l'information correspondante du tableau de droite, en indiquant le numéro de la phrase et la lettre associée.

« La file d'entrée ne se vide pas » est l'événement contraire de A, puisque A désigne une file vide au moins une fois dans la journée. Sa probabilité vaut donc $1 - P(A) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$. Dans le tableau de droite, 0,97 correspond à la lettre E. On associe donc la phrase numéro 1 à E.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1 - E

Question 2. Associer l'événement « La file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée mais pas le réservoir » à l'information correspondante du tableau de droite.

1. La file vide au moins une fois correspond à A.
2. Le réservoir n'est jamais vide correspond à l'événement contraire de B.
3. L'événement demandé est donc $A \cap \bar{B}$, noté C dans le tableau.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 2 - C

Question 3. Associer la probabilité que la file d'entrée et le réservoir aient tous deux été vides au moins une fois dans la journée à l'information correspondante du tableau de droite.

Les deux équipements sont vides au moins une fois lorsque A et B sont réalisés simultanément. L'indépendance de A et B permet de multiplier leurs probabilités : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$. Cette valeur correspond à la lettre F dans le tableau de droite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 3 - F

Question 4. Associer la probabilité que la machine ait connu un défaut d'approvisionnement dans la journée à l'information correspondante du tableau de droite.

Un défaut survient lorsque A ou B se réalise. La probabilité de $A \cup B$ se calcule en additionnant les probabilités, puis en retranchant leur intersection pour ne pas la compter deux fois :

- $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.
- Dans le tableau, cette valeur correspond à D.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 4 - D

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. Donner sans justification la loi de probabilité suivie par X, qui compte le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours consécutifs, et préciser ses paramètres.

1. La période comporte 200 journées, considérées indépendantes.
2. À chaque journée, la probabilité d'une panne est 0,025.
3. X compte le nombre de journées avec panne : c'est donc une variable binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}025$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale $B(200 ; 0{,}025)$.

Question 2.a. Sachant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ, justifier que λ = 5.

L'approximation d'une loi binomiale $B(n ; p)$ par une loi de Poisson utilise le paramètre $\lambda = np$. Ici, $n = 200$ et $p = 0{,}025$, donc $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$

Question 2.b. Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ, donner la valeur de $P(Y \leq 10)$, arrondie à 10^{-3}.

Pour Y de loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités des valeurs entières de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = \Sigma_{k=0}^{10}\, e^{-5} \times 5^k/k!$. La somme vaut environ 0,9863047. Arrondie au millième, elle donne 0,986.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$

Question 2.c. **La représentation graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour la loi de Poisson, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Pour k = 15, la formule de Poisson donne :

$P(Y = 15) = 5^{15}e^{-5}/(1 \times 2 \times \ldots \times 15) \approx 0{,}000157245$.

Cette probabilité est très petite et peut sembler nulle sur le graphique, mais elle est strictement positive. La conjecture est donc fausse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157245 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des mesures des 100 bouteilles présentées dans le tableau, déterminer à la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2} près.**

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée vaut $(17 \times 73 + 20 \times 74 + 43 \times 75 + 13 \times 76 + 7 \times 77)/100 = 74{,}73$ cL. L'écart type calculé avec le diviseur 100 vaut environ 1,103 cL, soit 1,10 cL au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Moyenne : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. **Sous l'hypothèse H_0 : m = 75, la moyenne Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer un réel h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h)$ soit égal à 0,95 à 10^{-2} près.**

Pour une loi normale centrée réduite, l'intervalle central contenant 95 % des valeurs est approximativement [−1,96 ; 1,96]. La demi-largeur recherchée est donc $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL. À 10^{-2} près, h = 0,22 cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % pour H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75.

On compare la moyenne observée à l'intervalle central défini par h ≈ 0,22 cL :

- Si elle appartient à [75 − 0,22 ; 75 + 0,22], soit [74,78 ; 75,22] cL, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est hors de cet intervalle, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la moyenne est dans [74,78 ; 75,22] cL ; la rejeter sinon.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon, déterminer si l'on peut accepter l'hypothèse H_0 : m = 75.

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. Elle est inférieure à la borne basse 74,78 cL de l'intervalle d'acceptation ; elle n'appartient donc pas à [74,78 ; 75,22]. On rejette H_0 au seuil de 5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : H_0 est rejetée, car 74,73 < 74,78.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, porte le code 22-MATGRD1 et dure deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité, de 1 à 2. Elle étudie l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical et le fonctionnement d'une machine à embouteiller, avec modélisation, équations différentielles, probabilités et test statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement de variable $y = \ln(N - 30)$ transforme le modèle exponentiel en relation linéaire, ajustable par la méthode des moindres carrés.
- Pour $y' + ay = b$, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution constante b/a à la solution de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur n jours indépendants suit une loi binomiale B(n ; p), approchée ici par une loi de Poisson de paramètre np.
- Dans un test bilatéral à 95 %, on compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les nombres de personnes sont exprimés en milliers et le temps est compté depuis 2013.
- Conserver les valeurs non arrondies pendant les calculs et arrondir seulement au degré de précision demandé.
- Une probabilité de Poisson peut être très petite sans être égale à zéro.
- Pour le test, comparer la moyenne observée à l'intervalle de décision et conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment transformer le modèle exponentiel en une relation linéaire pour l'ajustement ?

On pose $y = \ln(N - 30)$. Les données transformées forment le nuage à ajuster par une droite $y = ak + b$. On revient au modèle de N en exponentiant la relation obtenue.

Q : Pourquoi le nombre de pannes peut-il être approché par une loi de Poisson ?

Le nombre de pannes suit d'abord une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025. Comme le nombre de jours est grand et la probabilité de panne faible, l'approximation de Poisson utilise $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices sont chacun notés sur 10 points. Répartissez le temps entre eux selon leur longueur, avancez sur les sous-questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Comment conclure le test statistique bilatéral au seuil de 95 % ?

Il faut établir l'intervalle de décision sous H_0, comparer la moyenne observée à cet intervalle, puis conclure en contexte. La décision indique si les résultats permettent d'accepter H_0 au seuil retenu.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Architectures en Métal : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.