Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf 3 pour la spécialité Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Production et durée de vie de tubes fluorescents, conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m·s⁻¹ avant d’être ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. Les trois parties portent sur une équation différentielle, l’étude de la fonction et de la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle (E₀) : y′ + 0,8y = 0.

La formule fournie dans le sujet donne, pour une équation homogène de la forme $y\prime + ay = 0$, les solutions $y(t) = Ce^{-at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. On remplace donc directement le coefficient dans cette formule. Cette famille décrit toutes les solutions sur l’intervalle considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, sa dérivée vaut $g\prime(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g\prime(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Ce résultat est égal au second membre de l’équation. La vérification est donc satisfaite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g\prime(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution de (E).

Question 1. c. Déduire de la question précédente l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Toute solution de (E) s’obtient en ajoutant à cette solution une solution de l’équation homogène associée, trouvée à la question 1.a. Celle-ci contient une constante réelle arbitraire. On obtient ainsi toutes les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Question 2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale f(0) = 20.

On part de la solution générale de (E), $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + C = 20$, puis $C = 15$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on détermine la fonction vitesse demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend alors vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 5. Par passage à la limite, on obtient la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et donner une équation de celle-ci.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, dont l'ordonnée est cette limite. Il suffit d'écrire l'équation de la droite horizontale correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$ pour tout t de [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f\prime(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 en $+\infty$, comme établi précédemment.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f\prime(t)$	−	
Variation de f	20	↘ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 à 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or, pour tout temps fini $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse décroît, mais sa limite est strictement positive.

- La vitesse ne s'annule jamais selon le modèle.
- Le chariot ne s'arrête donc pas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre zéro.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ en utilisant la dérivée de l'exponentielle composée : $F\prime(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, d'où $F\prime(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. C'est exactement $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F\prime(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. À l'aide de la formule d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$.
2. Avec l'expression de F, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.

Cette valeur exacte est en mètres. Son approximation arrondie au centimètre fournit la distance demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier la seule réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, à partir du résultat affiché par le logiciel de calcul formel. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel affiche la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, il faut donc choisir celle qui conserve le terme linéaire et le terme quadratique avec ce reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en l'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f\prime(0)(t - 0)$. On a $f(0) = 20$, valeur donnée dans l'énoncé, et $f\prime(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t.$

2. Production et durée de vie de tubes fluorescents, conformité des rivets

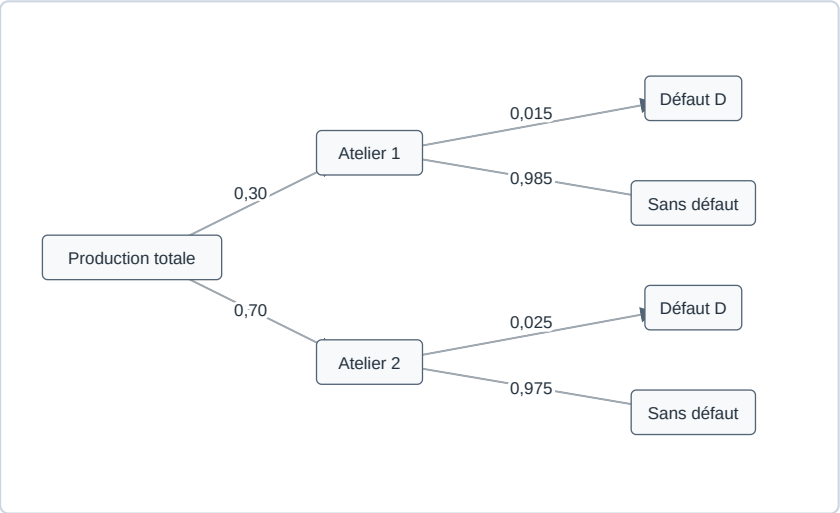
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de bon fonctionnement selon une loi exponentielle, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les événements « le tube présente un défaut » et « le tube ne présente pas de défaut », à partir des proportions et taux indiqués.

On sépare d'abord la production selon l'atelier, puis chaque atelier selon la présence ou non d'un défaut. Les probabilités des deux premières branches sont les proportions de production ; celles des branches suivantes sont conditionnelles à l'atelier. Pour chaque nœud, les probabilités des branches issues de ce nœud totalisent 1.

Production et conformité des tubes



Proportions de production, puis probabilités conditionnelles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30, puis D : 0,015 et non D : 0,985. Atelier 2 : 0,70, puis D : 0,025 et non D : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité recherchée est le produit de la proportion de tubes fabriqués par l'atelier 1 et du taux de défaut de cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Il s'agit de la proportion de toute la production issue de l'atelier 1 et défectueuse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,0195, valeur imprimée dans l'énoncé.**

Les deux cas d'origine sont incompatibles et couvrent toute la production. Par la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. La valeur 0,0195 imprimée est corrigée à la main sur la page en 0,0220.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 % ; la correction manuscrite confirme 0,0220.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Parmi les tubes sans défaut, la probabilité d'être issu de l'atelier 2 vaut $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité totale d'absence de défaut est $1 - 0,022 = 0,978$. On divise la première par la seconde pour obtenir la probabilité conditionnelle demandée.

$P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée T de bon fonctionnement, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule de l'énoncé donne $E(T) = 1/\lambda$. Ici, $\lambda = 0,001$, donc $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Cette espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé ait une durée de bon fonctionnement inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La durée suit une loi continue, donc $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997$, soit 1,00 après arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$, soit 100 % au centième près.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé ait une durée de bon fonctionnement supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée donnée pour une loi exponentielle est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, pour $t = 10\,000$ et $\lambda = 0,001$, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. L'arrondi au centième est 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir d'un échantillon de 1 000 rivets, dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence constatée dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets, 975 sont conformes, donc $f = 975/1\,000 = 0,975$. La proportion estimée dans l'ensemble de la production est ainsi de 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit 97,5 % de rivets conformes.

Question 2. On admet que la fréquence F des rivets conformes dans un échantillon de 1 000 suit une loi normale de moyenne p et d'écart type √(p(1 − p)/1000). En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur f pour p et arrondir ses bornes à 10^{-3} près.

On applique la formule de l'énoncé avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$: $[f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n}\ ;\ f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}]$. Les bornes calculées sont environ 0,965323 et 0,984677. Arrondies à 10^{-3} près, elles donnent 0,965 et 0,985.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est 2, sauf 3 pour la spécialité Traitement des matériaux. Elle étudie le freinage d'un chariot, la production et la durée de vie de tubes fluorescents, ainsi que la conformité de rivets, en évaluant équations différentielles, analyse, intégration, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de résoudre l'équation avec second membre.
- Si $\lim f(t) = L$ lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- La formule fournie pour l'intervalle de confiance à 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre, inscrire les probabilités des ateliers puis les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut.
- Distinguer une probabilité conjointe telle que $P(A_1 \cap D)$ d'une probabilité conditionnelle.
- Pour une distance, vérifier la primitive puis calculer $F(t_1) - F(t_0)$, avec l'unité et l'arrondi demandés.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et $n = 1\,000$, puis arrondir les bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle. Si F est une primitive de f, calculez $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimez le résultat en mètres et appliquez l'arrondi demandé.

Q : Quelle formule utiliser pour calculer une probabilité de durée de vie ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La probabilité d'une durée supérieure à t est le complément $e^{-\lambda t}$. Veillez à employer t dans l'unité donnée.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et les deux exercices valent chacun 10 points. Vous pouvez répartir le temps de façon équilibrée, puis réserver quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quels éléments de méthode sont importants pour le barème ?

Rendez les étapes lisibles, définissez les événements et indiquez la formule utilisée avant le calcul. Formulez une conclusion reliée au contexte et respectez les unités ainsi que les arrondis explicitement demandés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsamcr.fr/assets/annales/bts-amcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS AMCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Architectures en Métal : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.